«Использование теоремы Виета при решении заданий ЦЭ/ЦТ по математике»

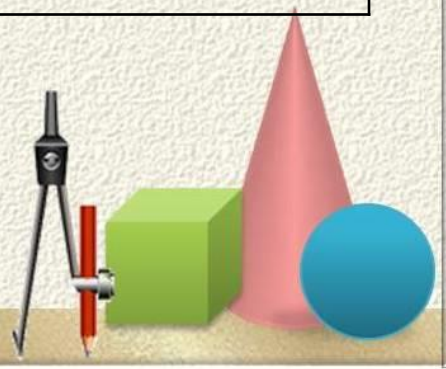
Астапова И. И., учитель математики
ГУО «Средняя школа № 23 г. Могилева»





24.10	10.00 – 11.30	онлайн-консультация	Использование теоремы Виета при решении заданий ЦЭ/ЦТ по математике
28.11	10.00 – 11.30	онлайн-консультация	Упрощение тригонометрических выражений
05.12	дистанционное тестирование		
19.12	10.00 – 11.30	онлайн-консультация	Решение неравенств методом интервалов
27.02	10.00 – 11.30	онлайн-консультация	Решение показательных уравнений
20.03	10.00 – 11.30	онлайн-консультация	Преобразование логарифмических выражений
03.04	дистанционное тестирование		
24.04	10.00 – 11.30	онлайн-консультация	Решение текстовых задач с практическим содержанием





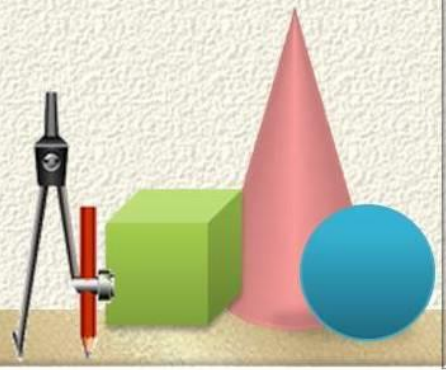
Теорема Виета

Если ПРИВЕДЁННОЕ квадратное уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет корни, то их сумма равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком ($-b$), а их произведение равно свободному члену (c).



$$x_1 + x_2 = -b,$$

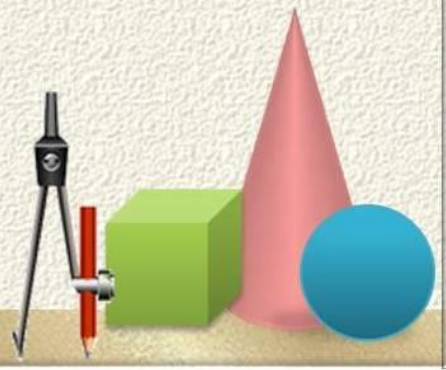
$$x_1 \cdot x_2 = c$$



Обратная теорема Виета

Если числа x_1 и x_2 таковы, что их сумма $x_1 + x_2 = -b$, а произведение $x_1 \cdot x_2 = c$, то эти числа являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$.





ЗАДАНИЕ 1

Используя теорему Виета, написать приведённое квадратное уравнение, корнями которых являются числа $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$.

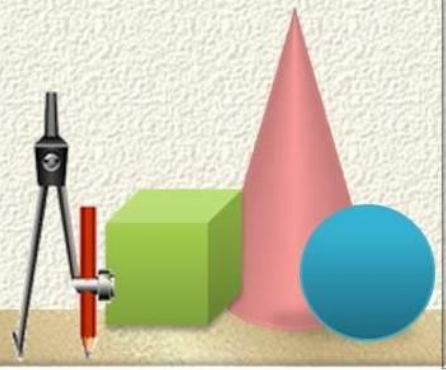
$$(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2$$

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=1^2-(\sqrt{2})^2=-1$$

$-b=2$ $\qquad$ $c=-1$

$$x^2-2x-1=0$$





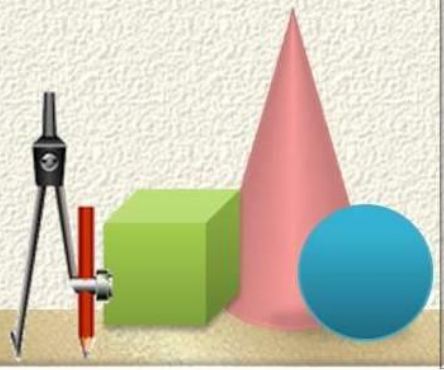
ЗАДАНИЕ

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$x^2 + 3x - 10 = 0$





ЗАДАНИЕ

$x^2 - 7x + 10 = 0$

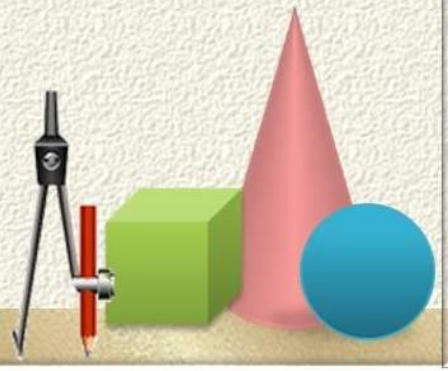
$x^2 + 7x + 10 = 0$

$x_1 + x_2 = 7$

$x_1 \cdot x_2 = 10$

$x^2 + 3x - 10 = 0$





ЗАДАНИЕ

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$x_1 + x_2 = 7$

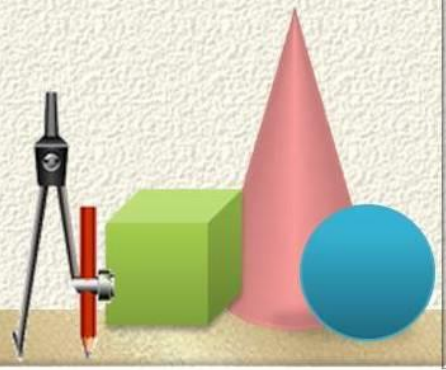
$x_1 \cdot x_2 = 10$

$x_1 = 2$

$x_2 = 5$

$x^2 + 3x - 10 = 0$





ЗАДАНИЕ

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_1 + x_2 = 7$

$x_1 \cdot x_2 = 10$

$x_1 = 2$

$x_2 = 5$

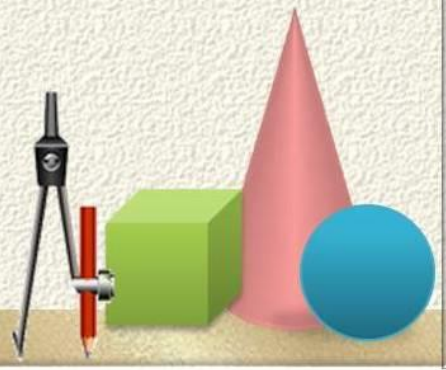
$x^2 + 7x + 10 = 0$

$x_1 + x_2 = -7$

$x_1 \cdot x_2 = 10$

$x^2 + 3x - 10 = 0$





ЗАДАНИЕ

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_1 + x_2 = 7$

$x_1 \cdot x_2 = 10$

$x_1 = 2$

$x_2 = 5$

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$x_1 + x_2 = -7$

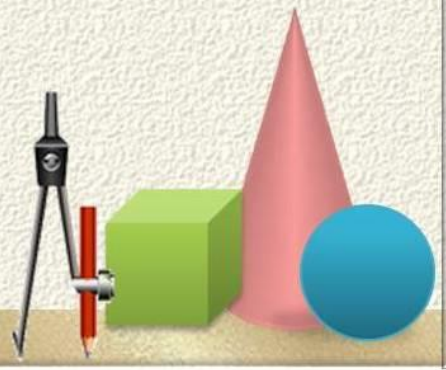
$x_1 \cdot x_2 = 10$

$x_1 = -2$

$x_2 = -5$

$x^2 + 3x - 10 = 0$





ЗАДАНИЕ

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_1 + x_2 = 7$

$x_1 \cdot x_2 = 10$

$x_1 = 2$

$x_2 = 5$

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$x_1 + x_2 = -7$

$x_1 \cdot x_2 = 10$

$x_1 = -2$

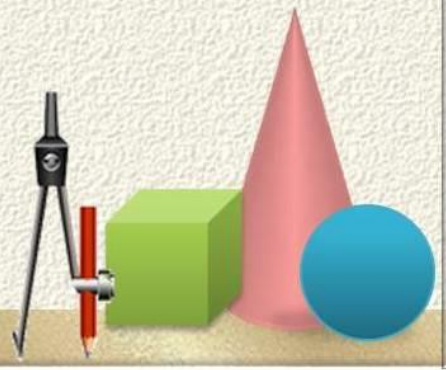
$x_2 = -5$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$x_1 + x_2 = -3$

$x_1 \cdot x_2 = -10$





ЗАДАНИЕ

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_1 + x_2 = 7$
$x_1 \cdot x_2 = 10$

$x_1 = 2$
$x_2 = 5$

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$x_1 + x_2 = -7$
$x_1 \cdot x_2 = 10$

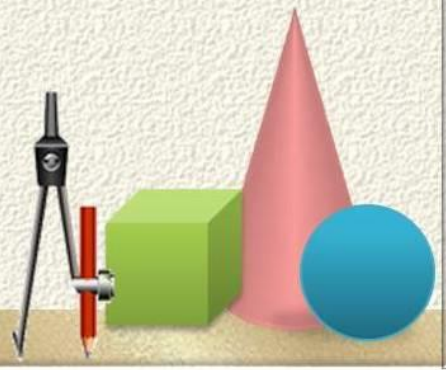
$x_1 = -2$
$x_2 = -5$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$x_1 + x_2 = -3$
$x_1 \cdot x_2 = -10$

$x_1 = -5$
$x_2 = 2$

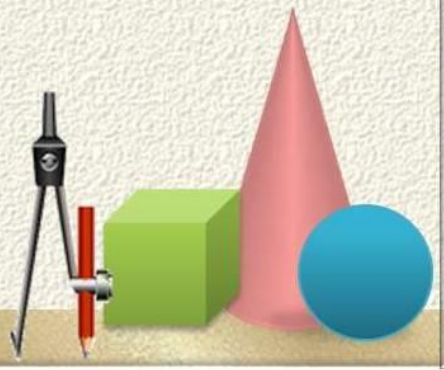




- **Любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 1$ можно сделать приведённым,**

  если разделить обе его части на коэффициент, который располагается перед x^2, то есть на a



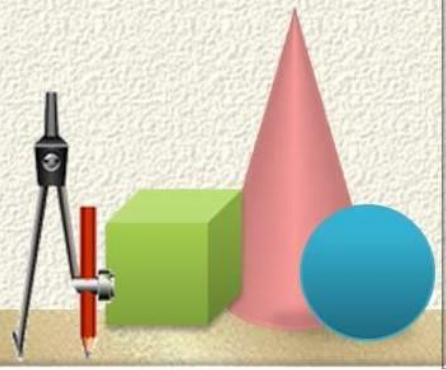


$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

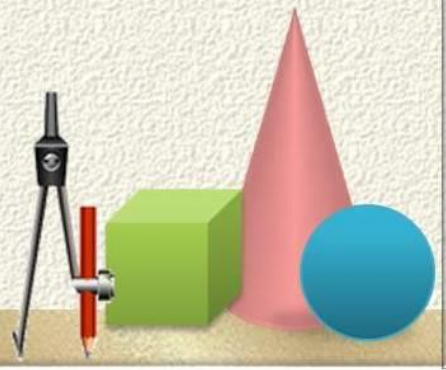




Теорема Виета для полного квадратного уравнения

1. Если x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
2. Если x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

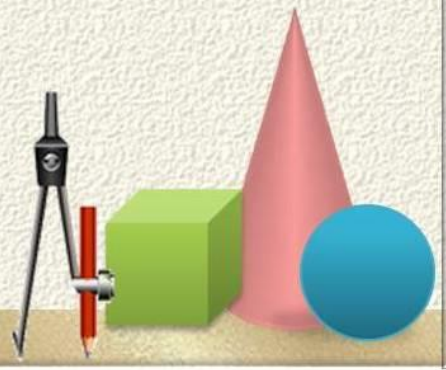




Метод переброски старшего коэффициента

- **Решить уравнение $6x^2 - 7x - 3 = 0$.**
- **Выполним «переброску» и решим новое уравнение с помощью теоремы Виета:**
- $y^2 - 7y - 3 \cdot 6 = 0;$
- $y^2 - 7y - 18 = 0.$
- **По теореме Виета $y_1 = 9;\ y_2 = -2.$**
- **Теперь вернемся к переменной x. Для этого разделим полученные результаты $y_{1,2}$ на первый коэффициент исходного уравнения, т.е. на 6. Получим:**
- $x_1 = 9/6;\ x_2 = -2/6.$
- $x_1 = 1,5;\ x_2 = -1/3.$
- **ОТВЕТ:** $-1/3;\ 1,5.$

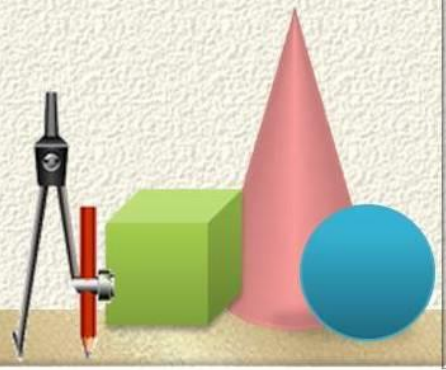




Частные случаи теоремы Виета

Следствие 1	Следствие 2	Следствие 3
$a+b+c=0$	$a+c=b$	
$x_1=1$ $x_2=\frac{c}{a}$	$x_1=-1$ $x_2=-\frac{c}{a}$	Если x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0, c\neq 0)$, то $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ - корни уравнения $cx^2+bx+a=0$



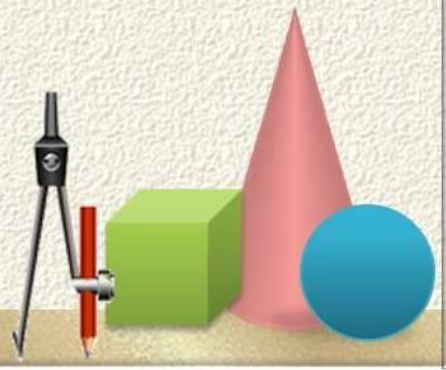


ЗАДАНИЕ 3

- **Решить уравнение $4271x^2 - 4272x + 1 = 0$**
- **1способ : по методу переброски нам необходимо найти числа, сумма которых равна 4272, а произведение 4271 (после «переброски» свободный член равен $1 \cdot 4271 = 4271$). Это будут числа 4271 и 1. Тогда получим:**
- $x_1 = 4271/4271;\ x_2 = 1/4271.$
- $x_1 = 1;\qquad x_2 = 1/4271.$



ОТВЕТ: $x_1 = 1; x_2 = 1/4271.$



ЗАДАНИЕ 3

Решить уравнение $4271x^2 - 4272x + 1 = 0$

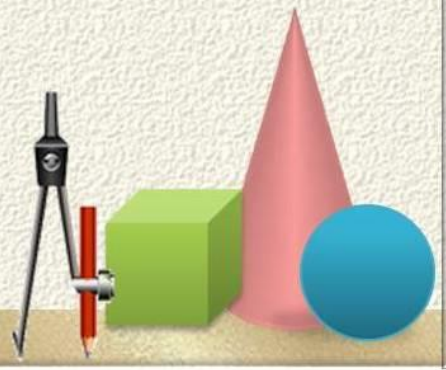
2 способ: легко заметить, что сумма коэффициентов $a + c + b = 0$

4271- 4272+1=0, тогда по следствию 1 можем сразу записать корни уравнения

$$x_1 = 1; \qquad x_2 = 1/4271.$$



ОТВЕТ: **1; 1/4271**



ЗАДАНИЕ 4

Решить уравнение $-435x^2 - 35x + 400 = 0$

2 способ: легко заметить, что сумма коэффициентов $a + c = b$

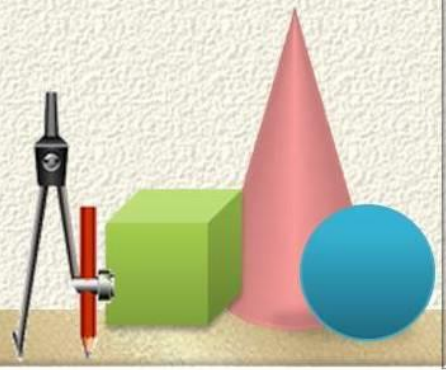
$-435 + 400 = -35$, тогда по следствию 2 можем сразу записать корни уравнения

$x_1 = -1$; **$x_2 = -400/(-435)$;**

$x_2 = 80/87$



ОТВЕТ: **-1; $80/87$**



ЗАДАНИЕ 5

Если x_1 ; x_2 корни уравнения $5x^2—x—3=0$, то числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ являются корнями уравнения:

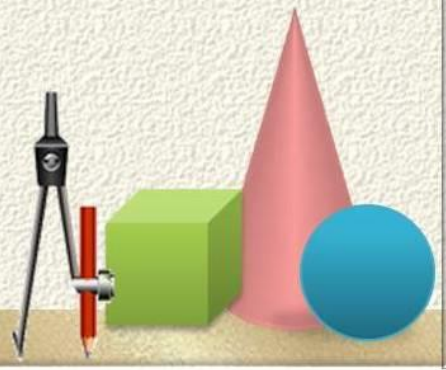
1)$3x^2—x—5=0$; 2) $3x^2+x—1=0$; 3) $3x^2—x—1=0$;

4) $3x^2+x—5=0$; 5) $3x^2+x+5=0$.

Если знать частный случай 3, то а и с нужно поменять местами и у нас получится уравнение $-3x^2-x+5=0$; а после того, как поделим обе части уравнения на (−1), то получим искомое уравнение ***$3x^2+ x—5=0$.***



ОТВЕТ: ***4) $3x^2+x—5=0$***



2 способ решения

$5x^2 - x - 3 = 0$

$x_1 + x_2 = \frac{1}{5};$

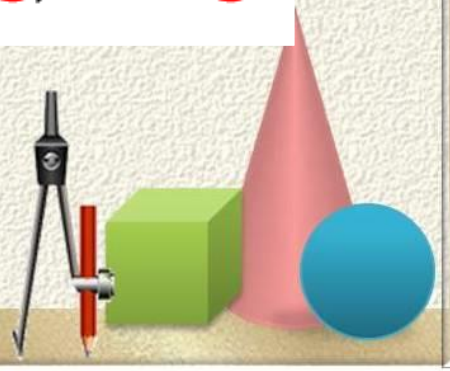
$x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{5}$

Тогда, если корни уравнения $\frac{1}{x_1}$ *и* $\frac{1}{x_2}$, *то*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = 1 : \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{3}$$





Получили: $-b = -\frac{1}{3}$; $b = \frac{1}{3}$;

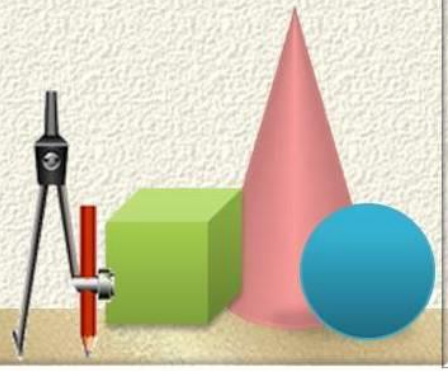
$c = -\frac{5}{3}$.

$$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} = 0; \ |\cdot 3$$

$$3x^2 + x - 5 = 0$$

Ответ: **4**



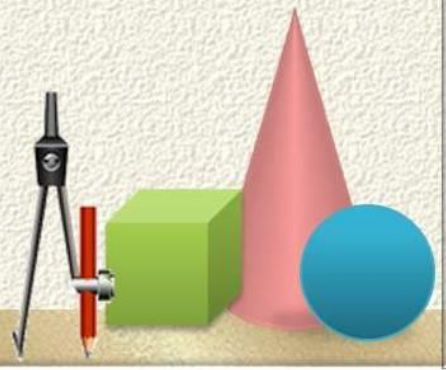


Применение теоремы, обратной теореме Виета

Найдите корни уравнений (устно)

Вариант1	Вариант2
1. $x^2 - 6x + 8 = 0$	1. $x^2 - 8x + 15 = 0$
2. $x^2 + 4x - 45 = 0$	2. $x^2 + 5x - 14 = 0$
3. $x^2 - 6x - 27 = 0$	3. $x^2 - 10x - 24 = 0$
4. $237x^2 - 37x - 200 = 0$	4. $158x^2 + 160x + 2 = 0$
5. $8x^2 + 7x - 1 = 0$	5. $17x^2 + 4x - 21 = 0$
6. $8x^2 - 6x + 1 = 0$	6. $15x^2 - 8x + 1 = 0$





Применение теоремы Виета, когда корни считать не надо

Задание 6

Не вычисляя корней уравнения

$$2x^2 - 5x - 4 = 0,$$

найдите значение выражения

а) $x_1x_2^2 + x_2x_1^2$,

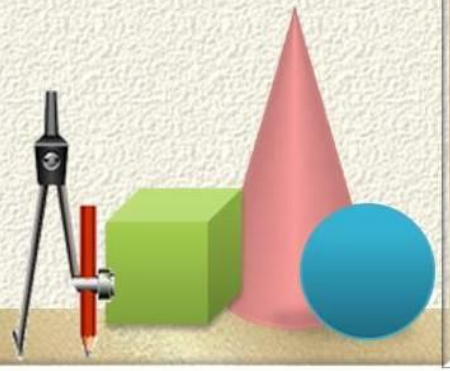
б) $x_1^2 + x_2^2$;

в) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$;

г) $x_1x_2^4 + x_2x_1^4$

д) $|x_1 - x_2|$





РЕШЕНИЕ

$2x^2 - 5x - 4 = 0$

$x_1x_2^2 + x_2x_1^2 = x_1x_2(x_1 + x_2)$

По теореме Виета:

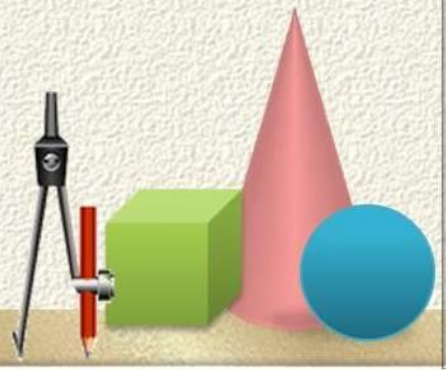
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 + x_2 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

$x_1x_2^2 + x_2x_1^2 = -2 \cdot 2{,}5 = -5$



Ответ: x =-5.



РЕШЕНИЕ

$2x^2 - 5x - 4 = 0,$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

По теореме Виета:

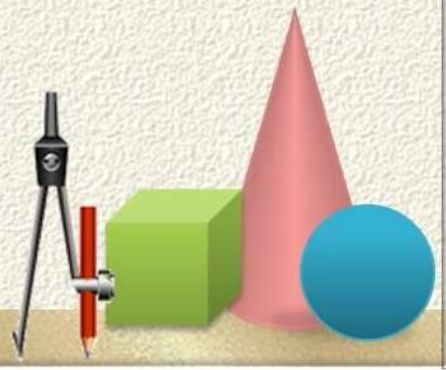
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 + x_2 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2{,}5^2 - 2 \cdot (-2) = 6{,}25 + 4 = 10{,}25$$



Ответ: $x = 10{,}25$



РЕШЕНИЕ

$$2x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$$

По теореме Виета:

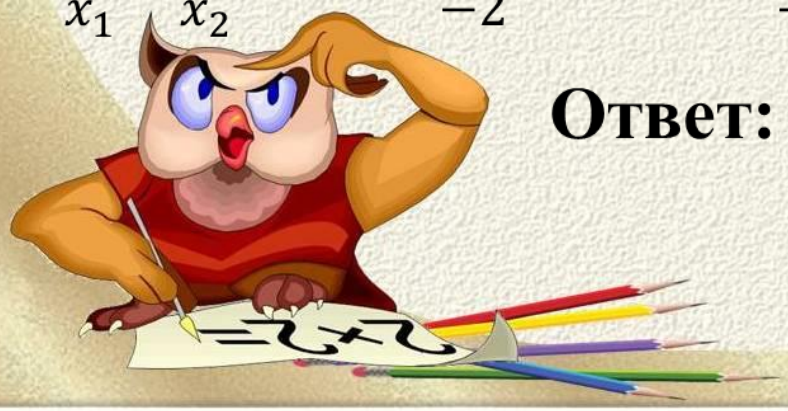
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

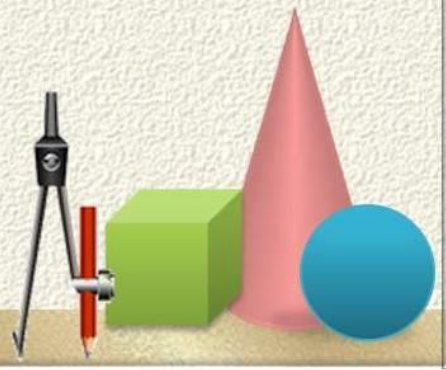
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{2{,}5^2 - 2 \cdot (-2)}{-2} = \frac{6{,}25 + 4}{-2} = \frac{10{,}25}{-2} = -5{,}125$$



Ответ: $x = -5{,}125$



РЕШЕНИЕ

$$2x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$x_1x_2^4 + x_2x_1^4 = x_1x_2(x_1^3 + x_2^3) = x_1x_2(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$
$$= x_1x_2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = x_1x_2(x_1 + x_2)\big((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2\big)$$
$$= x_1x_2(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2)$$

По теореме Виета:

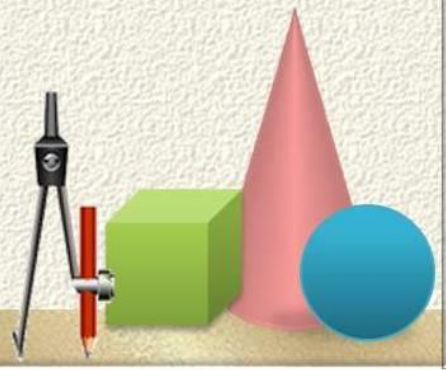
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 + x_2 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_1x_2^4 + x_2x_1^4 = -2 \cdot 2{,}5 \cdot \big(2{,}5^2 - 3 \cdot (-2)\big) = -5 \cdot 12{,}25 = -61{,}25$$



Ответ: $x = -61{,}25$



РЕШЕНИЕ

$$2x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

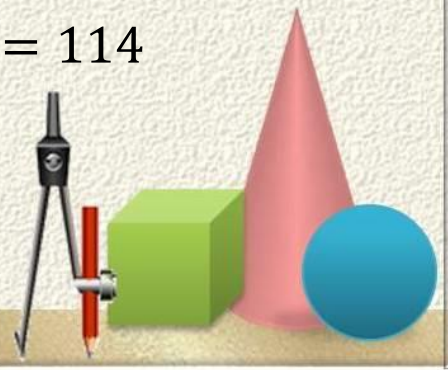
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{2{,}5^2 - 4 \cdot (-2)} = \sqrt{6{,}25 + 8} = \sqrt{14{,}25} = \sqrt{\frac{57}{4}} = \frac{\sqrt{57}}{2}$$

$$4\sqrt{57}|x_1 - x_2| = 4\sqrt{57} \cdot \frac{\sqrt{57}}{2} = 2 \cdot 57 = 114$$



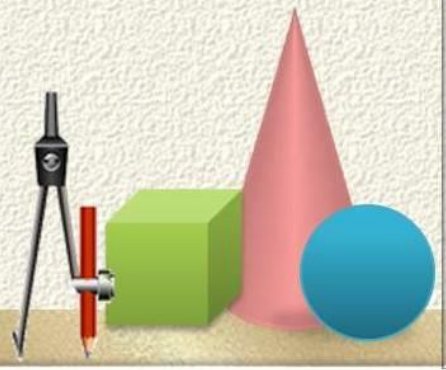
ОТВЕТ: $x = 114.$



ЗАДАНИЕ 7

Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + px + q = 0$ удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 = 5$ и $x_1^2 + x_2^2 = 17$. Найдите произведение чисел p и q.





РЕШЕНИЕ

$x^2 + px + q = 0$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ $\qquad x_1 + x_2 = 5$

$17 = 5^2 - 2x_1x_2$

$x_1x_2 = \dfrac{25 - 17}{2}$ $\qquad x_1x_2 = 4$

По теореме Виета:

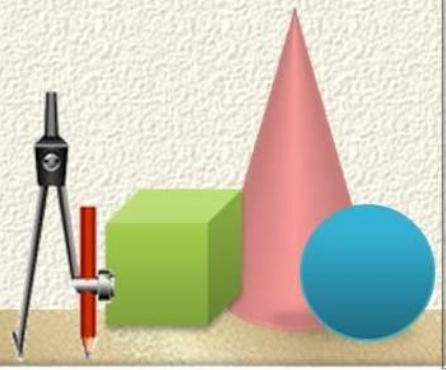
$x_1 + x_2 = -p$ $\quad 5 = -p$ $\quad p = -5$

$x_1 \cdot x_2 = q$ $\quad 4 = q$ $\quad q = 4$

p·q = –5·4 = – 20

Ответ: – 20



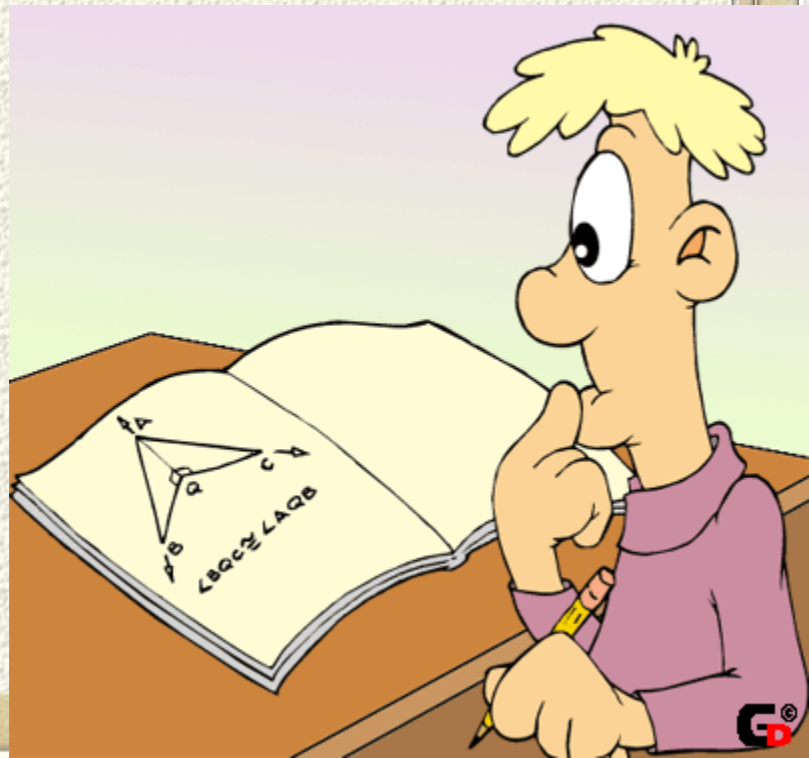


ЗАДАНИЕ 8

Один из корней уравнения $x^2 - 26x + q = 0$ равен 12.

Найдите x_2 и q.





РЕШЕНИЕ

Воспользуемся теоремой Виета:

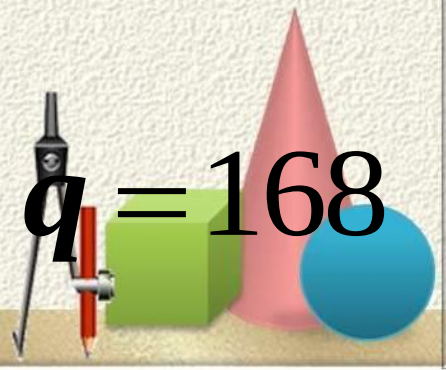
$$x^2 - 26x + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 26 \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = 12 \\ x_2 - ? \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 12 + x_2 = 26 \\ 12x_2 = q \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 14 \\ q = 12 \cdot 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 14 \\ q = 168 \end{cases}$$



ОТВЕТ: $x_2 = 14,\ q = 168$



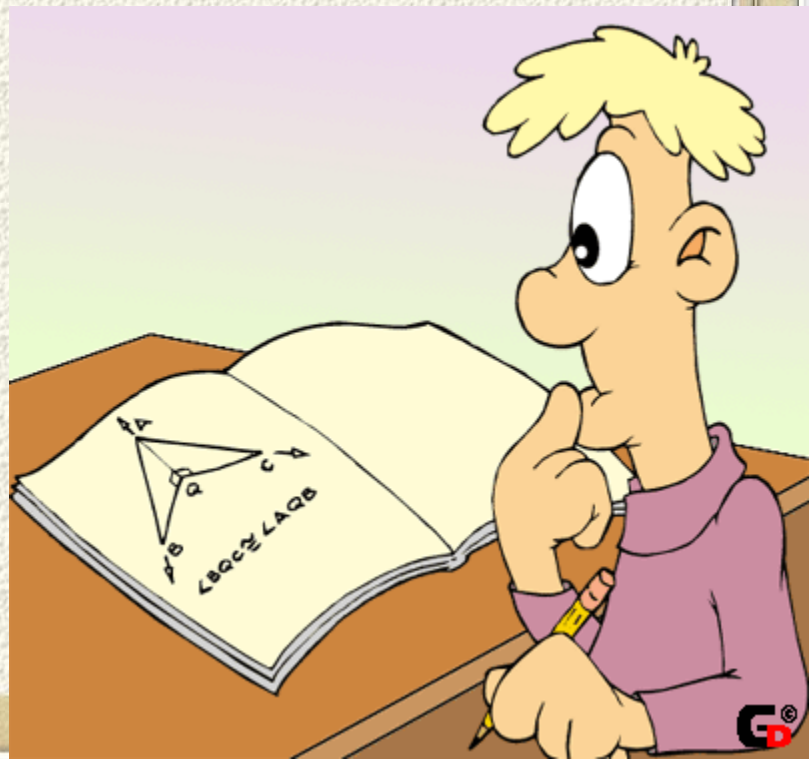
ЗАДАНИЕ 9

Один из корней уравнения

$5x^2 - 12x + c = 0$ **в три раза больше второго.**

Найдите c.





РЕШЕНИЕ

Пусть второй корень равен x_2.Тогда первый корень $x_1 = 3x_2$.

По теореме Виета сумма корней равна

$$x_1 + x_2 = -\frac{-12}{5} = 2,4$$

Составим уравнение:

$3x_2 + x_2 = 2,4$

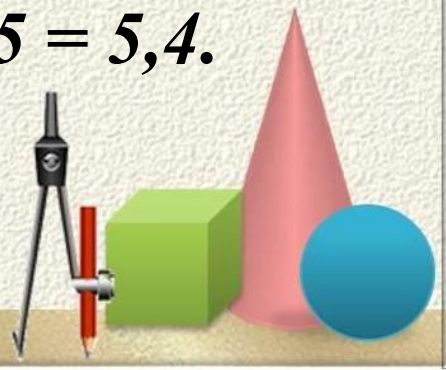
$4x_2 = 2,4$

$x_2 = 0,6$. Следовательно, $x_1 = 1,8$.

$c = (x_1 \cdot x_2) \cdot a = 0,6 \cdot 1,8 \cdot 5 = 5,4.$



ОТВЕТ: $C = 5,4$

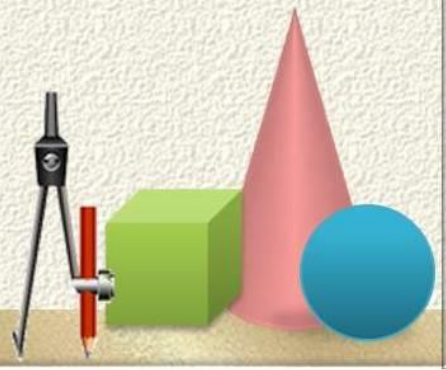


ЗАДАНИЕ 10

Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 22x + q = 0$ относятся как $7 : 4$. Найдите сумму большего корня и числа q.

1) 98; 2) 50; 3) 126; 4) 104; 5) 134.





РЕШЕНИЕ

$x^2 - 22x + q = 0$

Так как по условию $x_1 : x_2 = 7 : 4$, то пусть x_1 – первый корень, а $x_2 = \frac{4}{7} x_1$, тогда по теореме Виета имеем

$x_1 + x_2 = 22$

$x_1 + \frac{4}{7} x_1 = 22$

$\frac{11}{7} x_1 = 22$ $\quad 22 : \frac{11}{7} = \frac{22 \cdot 7}{1 \cdot 11} = \frac{2 \cdot 7}{1} = 14$

$x_1 = 14$

$x_2 = \frac{4}{7} \cdot 14 = 8$

$q = x_1 \cdot x_2$, $q = 14 \cdot 8 = 112$

Больший корень: $x_1 = 14$, тогда

$x_1 + q = 14 + 112 = 126$

Ответ: 3

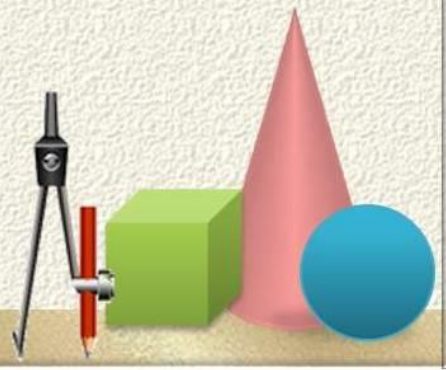
ЗАДАНИЕ 11

Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + px + q = 0$ удовлетворяют условиям $x_1^2 + x_2^2 = 5$ и $x_1 + x_2 = 3$

Найдите произведение чисел p и q.

1) – 3; 2) 6; 3) 5; 4) – 15; 5) – 6.





РЕШЕНИЕ

$x^2 + px + q = 0$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$ $\qquad x_1 + x_2 = 3$

$5 = 3^2 - 2x_1x_2,$

$x_1x_2 = (9 - 5) : 2,$

$x_1x_2 = 2.$

По теореме Виета:

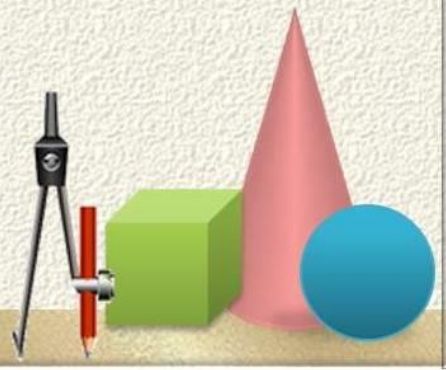
$x_1 + x_2 = -p,$ $\qquad 3 = -p,$ $\qquad p = -3$

$x_1x_2 = q;$ $\qquad 2 = q;$ $\qquad q = 2.$

$p \cdot q = -3 \cdot 2 = -6$

Ответ: 5





ЗАДАНИЕ 12

•Укажите номер квадратного уравнения, корнями которого являются числа ($x_1 - 1$) и ($x_2 - 1$), где x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $5x^2 - 7x - 2 = 0$.

1) $5x^2 + 17x + 10 = 0$;

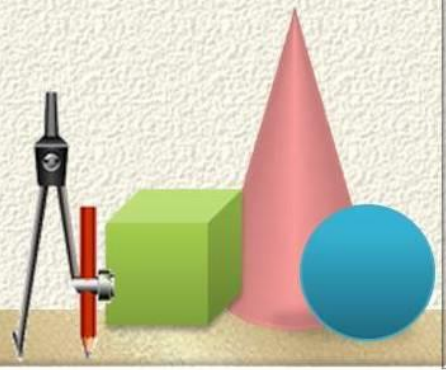
2) $x^2 + x - 2 = 0$;

3) $5x^2 - 17x + 10 = 0$;

4) $5x^2 + 3x - 4 = 0$;

5) $5x^2 - 3x - 4 = 0$.





РЕШЕНИЕ

$5x^2 - 7x - 2 = 0$

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{7}{5} = 1,4$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{5} = -0,4$

Для другого квадратного уравнения:

$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = (x_1 + x_2) - 1 - 1 = (x_1 + x_2) - 2 = 1,4 - 2 = -0,6$

$(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1 = x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 =$

$= -0,4 - 1,4 + 1 = -0,8$, тогда

$-0,6 = -b$ $\quad b = 0,6$

$-0,8 = c$, значит $\quad c = -0,8$

Подставляем в уравнение $x^2 + bx + c = 0$ числа 0,6 и −0,8:

$x^2 + 0,6x - 0,8 = 0 \quad | \cdot 5$

$5x^2 + 3x - 4 = 0$

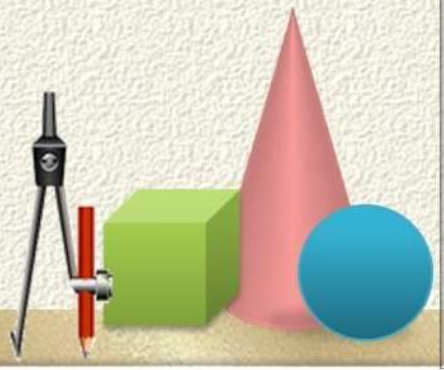
Ответ: 4

ЗАДАНИЕ 13

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $3x^2 - 5x + 1 = 0$.
Найдите значение выражения
$(5\,x_1^2 \cdot x_2^2) : (2(x_1 + x_2))$

1)6; 2)1/2; 3) - ½; 4)1/6 5) - 1/6





ЗАДАНИЕ 13

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $3x^2 - 5x + 1 = 0$.
Найдите значение выражения

$(5\,x_1^2 \cdot x_2^2) : (2(x_1 + x_2)) = (5\,(x_1 \cdot x_2)^2 : (2(x_1 + x_2))$

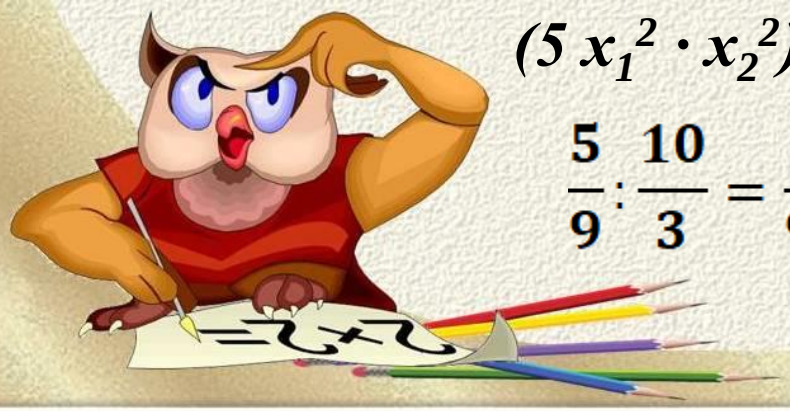
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$$

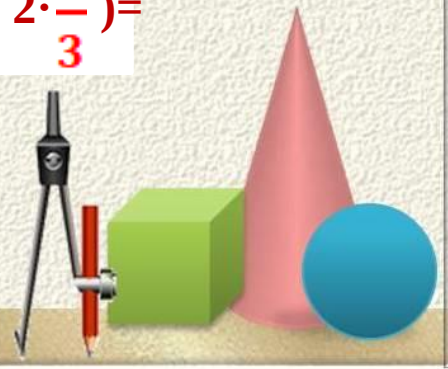
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$$

$(5\,x_1^2 \cdot x_2^2) : (2(x_1 + x_2)) = (5\,(\frac{1}{3})^2 : (2 \cdot \frac{5}{3}) =$

$$\frac{5}{9} : \frac{10}{3} = \frac{5 \cdot 3}{9 \cdot 10} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

Ответ: 4





ЗАДАНИЕ 14

Даны уравнения

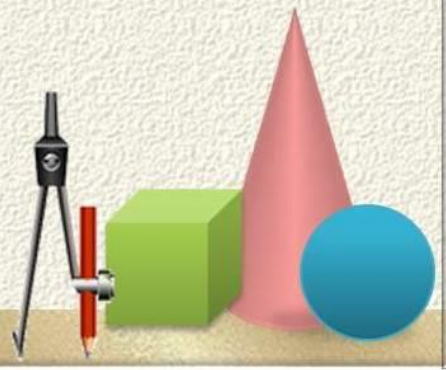
1) $x^2 + 3x = 0$; 2) $x^2 = 3$; 3) $x^2 + 9 = 0$;

4) $2x^2 - 3x + 4 = 0$; 5) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Выберите уравнение, сумма корней которого равна 3.

- ***1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.***





ЗАДАНИЕ 14

Даны уравнения

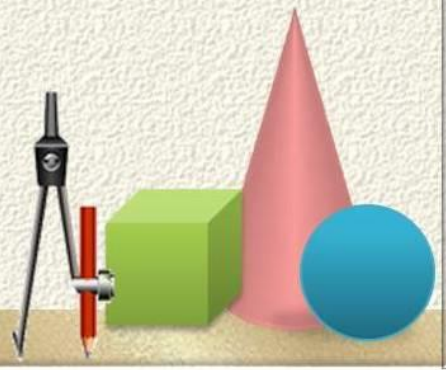
1) $x^2 + 3x = 0$; 2) $x^2 = 3$; 3) $x^2 + 9 = 0$;

4) $2x^2 - 3x + 4 = 0$; 5) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Выберите уравнение, сумма корней которого равна **3**.

•1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

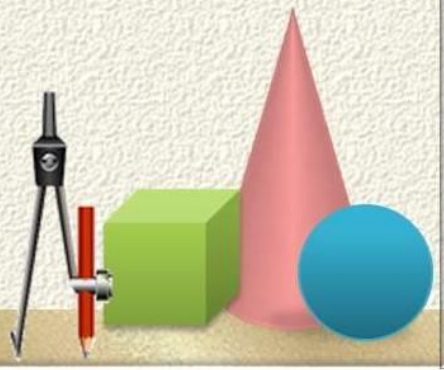




ЗАДАНИЕ 15

Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 82 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 3 часа 25 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.





РЕШЕНИЕ

	S, км.	v, км/ч	t, ч
Велосипедист	75	v	$\frac{75}{v}$
Автомобилист	75	v+82	$\frac{75}{v+82}$

$$\frac{75}{v} - \frac{75}{v+82} = 3\frac{5}{12}$$

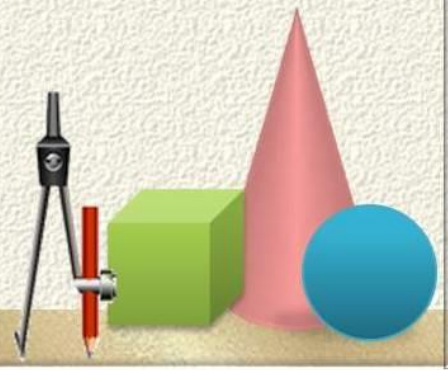
$$\frac{75(v+82) - 75v}{v(v+82)} = \frac{41}{12}$$

$$75 \cdot 82 \cdot 12 = 41v(v+82)$$

$$1800 = v^2 + 82v$$

$$\boldsymbol{v^2 + 82v - 1800 = 0}$$





РЕШЕНИЕ

$$v^2 + 82v - 1800 = 0$$

$$D = 13924$$

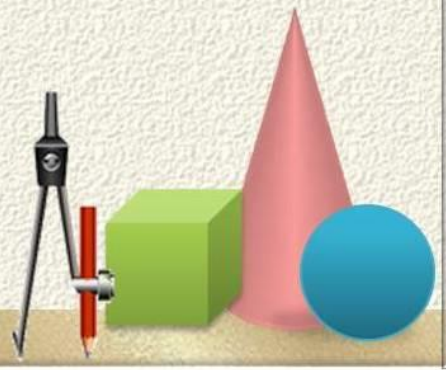
По теореме Виета:

$v_1 + v_2 = -82;$ $\qquad$ $v_1 = 18;$

$v_1 v_2 = -1800.$ $\qquad$ $v_2 = -100$



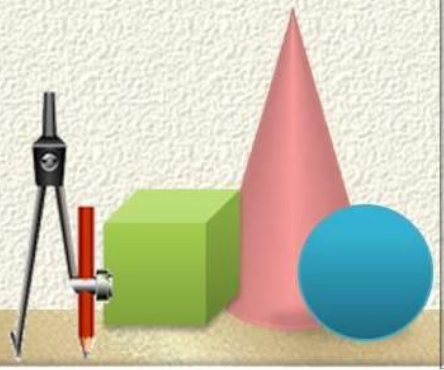
ОТВЕТ: ***v=18 км/ч***



ЗАДАНИЕ 16

Моторная лодка прошла 45 км по течению реки и 22 км против течения, затратив на весь путь 5 ч.. Определите скорость лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения равна 2 км/ч.





РЕШЕНИЕ

	S, км.	v, км/ч	t, ч
По течению	45	v+2	$\frac{45}{v+2}$
Против течения	22	v–2	$\frac{22}{v-2}$

$$\frac{45}{v+2}+\frac{22}{v-2}=5$$

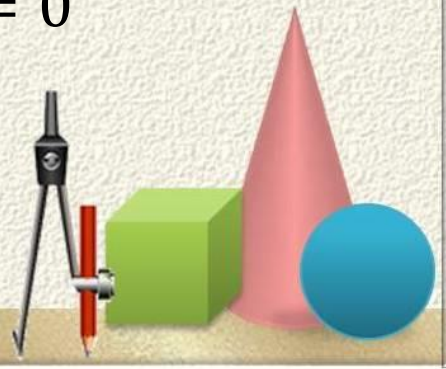
$$\frac{45(v-2)+22(v+2)-5(v+2)(v-2)}{(v+2)(v-2)}=0$$

$$45v-90+22v+44-5v^2+20=0$$

$$5v^2-67v-26=0$$

$$D=3963$$





РЕШЕНИЕ

$$v^2 - 67v + 26 \cdot 5 = 0,$$

$$v^2 - 67v + 2 \cdot 13 \cdot 5 = 0$$

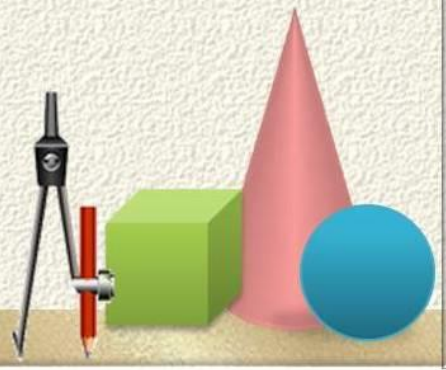
По теореме Виета:

$$v_1 = \frac{65}{5} = 13;$$

$$v_2 = \frac{2}{5}$$



ОТВЕТ: *v=13 км/ч*



ЗАДАНИЕ 17

Длины катетов прямоугольного треугольника являются корнями уравнения $x^2 - 5x + 2 = 0$. Тогда площадь треугольника равна:

1) 2,5; 2) 3,5; 3) 5; 4) 1; 5) 2.

$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ab,}$

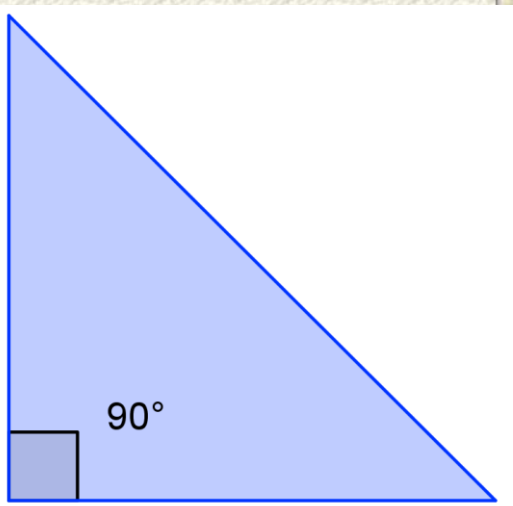
Длины катетов корни уравнения: $x^2 - 5x + 2 = 0$.

По теореме Виета:

$ab = 2$, а $S = 1$.

ОТВЕТ: **4)**





ЗАДАНИЕ 18

Длины диагоналей ромбаявляются корнями уравнения $0{,}1x^2 - 2{,}2x + 7{,}4 = 0$. Тогда площадь ромба равна:

1) 22; 2) 48;3)74; 4)19; 5) 37.

- $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} d_1 d_2}$.

Длины диагоналей ромба являются корнями уравнения $0{,}1x^2 - 2{,}2x + 7{,}4 = 0$

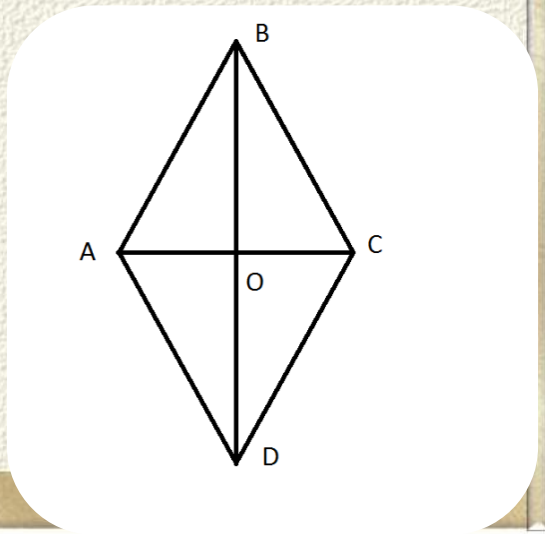
$$x^2 - 22x + 74 = 0$$

По теореме Виета: $ab = 74$,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 74 = 37.$$

- **ОТВЕТ: 5)**

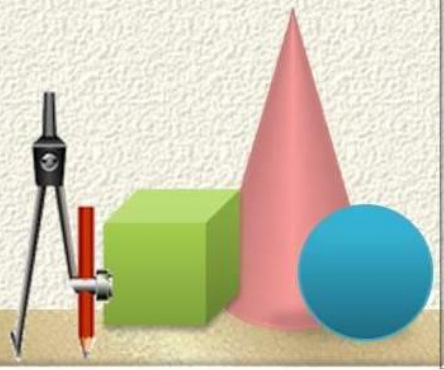




ЗАДАНИЕ 19

Найдите $|a|$***, если известно, что сумма квадратов корней уравнения*** $x^2 + ax - 5 = 0$***, равна 11.***





РЕШЕНИЕ

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -a\,,$$

$x_1x_2 = -5$;и по условию$x_1^2 + x_2^2 = 11$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 11$$

$$(-a)^2 - 2 \cdot (-5) = 11$$

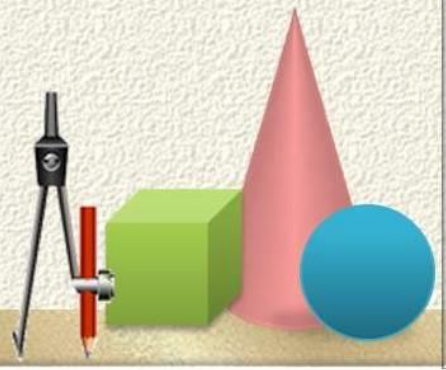
$$a^2 + 10 = 11;$$

$$a^2 = 1;$$

$$|a| = 1$$



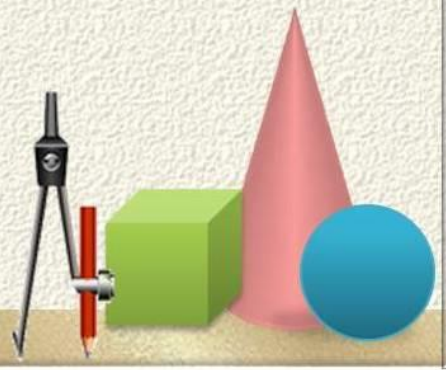
ОТВЕТ: *a=1*



ЗАДАНИЕ 20

Каждый из двухразличных корней квадратного трёхчлена $x^2+(3a-14)x+2b+9$ и его значение при x, равном 2, являются простыми числами. Найдите сумму корней квадратного трёхчлена и натуральных чисел a и b.





РЕШЕНИЕ

$$x_1 + x_2 = 14 - 3a,$$

$$x_1 x_2 = 2b + 9,$$

$$f(2) = 2^2 + (3a - 14) \cdot 2 + 2b + 9 = 4 + 6a - 28 + 2b + 9 = 6a + 2b - 15$$

Так как $a \in N$ и $b \in N$, то

$$14 - 3a \in \{11;\ 8;\ 5;\ 2\} = A$$

a=1; a=2; a=3; a=4

$$2b + 9 \in \{11;\ 13;\ 15;\ 17; \ldots\} = B$$

b=1; b=2; b=3; b=4

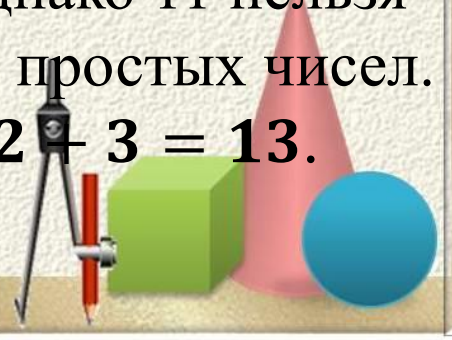
1. $x_1 + x_2 = 8$(при $a = 2$). Среди простых чисел только 3+5=8, тогда $3 \cdot 5 = 15 \in B$ (*при* $b = 3$) и $6a + 2b - 15 = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 15 = 3$ также простое число.

2. $x_1 + x_2 = 11$(при $a = 1$). Однако 11 нельзя представить в виде суммы двух простых чисел.

Значит, $x_1 + x_2 + a + b = 8 + 2 + 3 = 13$.

ОТВЕТ:13.





ЗАДАНИЕ 21

При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения

$\boldsymbol{x^2+(3-m)x+2m-18=0}$ наименьшая?

По теореме Виета имеем:

$\boldsymbol{x_1+x_2=}\ -(3-m)=m-3,$

$\boldsymbol{x_1x_2}=2m-18.$

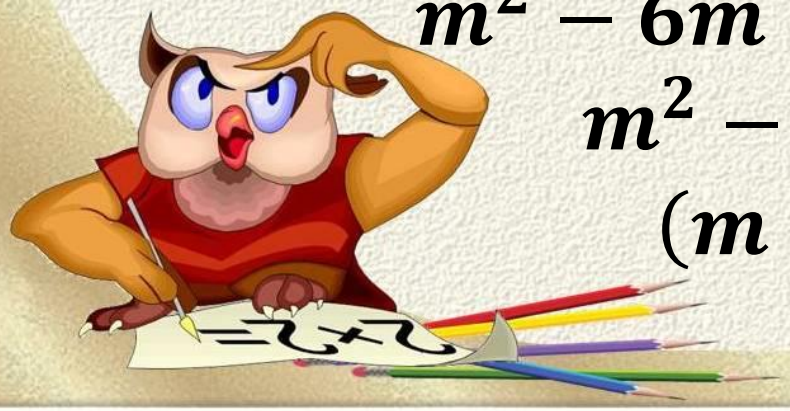
$$\boldsymbol{x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=}$$

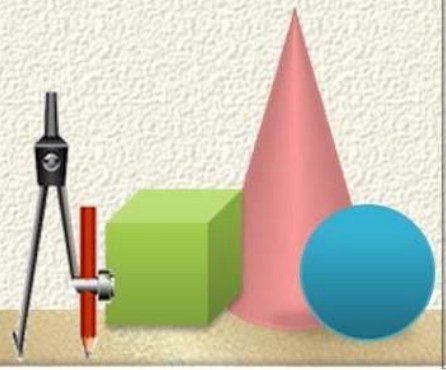
$$\boldsymbol{(m-3)^2-2(2m-18)=}$$

$$\boldsymbol{m^2-6m+9-4m+36=}$$

$$\boldsymbol{m^2-10m+45=}$$

$$\boldsymbol{(m-5)^2+20}$$





ЗАДАНИЕ 2

При $m = 5$ выражение $(m-5)^2+20$ принимает наименьшее значение, а, следовательно, и сумма квадратов корней данного уравнения будет наименьшей. С помощью проверки убеждаемся, что при $m = 5$ уравнение

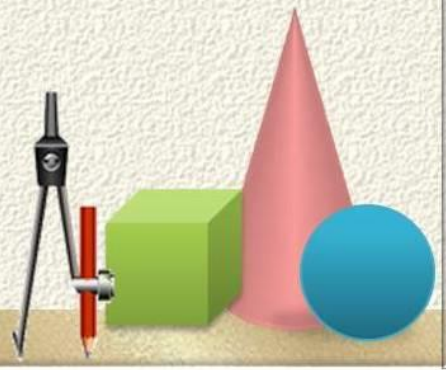
$x^2+(3-m)x+2m-18=0$ имеет корни.

$$x^2+(3-5)x+2\cdot 5-18=0$$

$$x^2+2x-8=0\,,D>0.$$



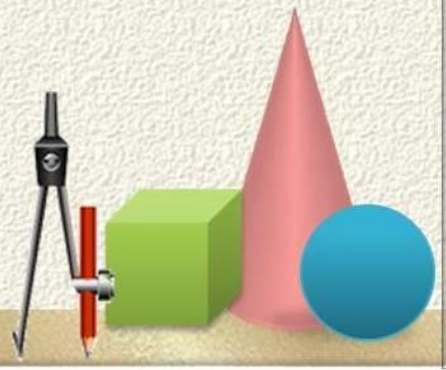
ОТВЕТ: 5.



Практические советы для учащихся:

- **1. Если перед вами приведенное квадратное уравнение, то первым делом пробуем найти корни подбором (если дискриминант положительный!). По теореме, ОБРАТНОЙ теореме Виета. В подавляющем большинстве заданий это срабатывает.**





Практические советы для учащихся:

- **2. Не боимся уравнений с большими коэффициентами! Самое главное — не бросаемся считать дискриминант!**

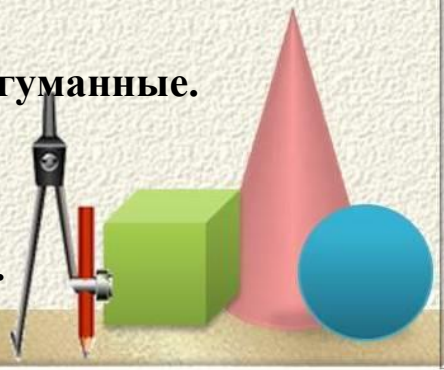
  Как правило, корни таких уравнений также довольно легко ищутся подбором.

- Может, конечно, и не повезти, но зачем же такой шанс упускать, правда?



Но есть у меня для вас хорошая новость.
Составители большинства заданий — люди гуманные.
И стараются составить уравнение так,
чтобы корни являлись целыми числами
и их легко можно было бы подобрать.

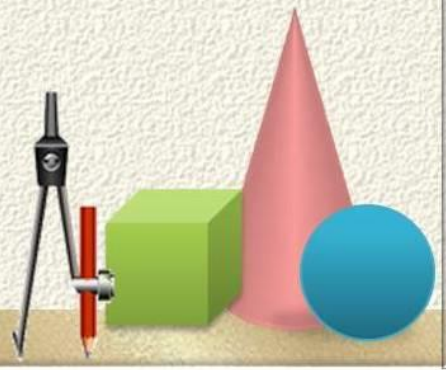
Пробуем делать это!



Практические советы для учащихся:

- **3. Найденные корни стараемся проверять! По сумме и произведению. Это здорово уменьшает количество ошибок при решении квадратных уравнений. Если уравнение не является приведённым, то для проверки пользуемся соответствующей модифицированной теоремой Виета.**



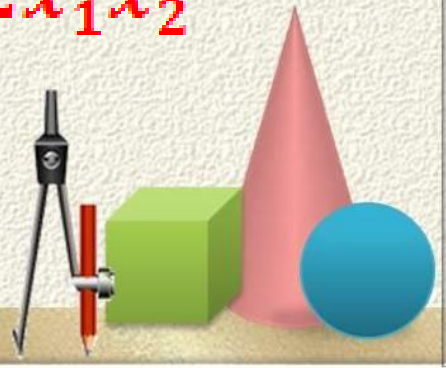


Практические советы для учащихся:

4. В серьёзных заданиях на сумму и произведение корней пользуемся формулами сокращённого умножения и алгеброй 7-го класса

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$





Спасибо за внимание!
Всем удачи при сдаче ЦЭ!

