**Комбинаторная геометрия**

Олимпиадные задачи этого раздела относятся к разнообразным оценкам, связанным с размещениями, покрытиями, упаковками и замощениями, различными комбинациями фигур. Здесь используются самые общие свойства, связанные с расположением фигур на плоскости и в пространстве. Отметим лишь следующие:

* Теорема Жордана: любая несамопересекающаяся замкнутая ломаная делит плоскость на две области – внутреннюю и внешнюю, причём любой путь из точки внутренней области в точку внешней пересекает эту ломаную, а две точки каждой области можно соединить путём, не пересекающим ломаной.
* Выпуклое множество – это множество, которое вместе с каждыми двумя точками содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки.
* Выпуклая оболочка фигуры – это наименьшее выпуклое множество, содержащее эту фигуру; выпуклая оболочка конечного множества – многоугольник (в пространстве – многогранник) с вершинами в некоторых из данных точек.
* Вместе с данной фигурой бывает полезно рассмотреть её r-окрестность: множество точек, наименьшее расстояние от которых до точек фигуры меньше чем r.
* Две фигуры (в частности, точки) находятся на расстоянии не меньшем 2r, если и только если их r-окрестности не пересекаются.
* Если объединение нескольких фигур содержит данную фигуру F, то говорят, что эти фигуры образуют покрытие фигуры F. При этом покрывающие фигуры могут пересекаться.
* Упаковка – это размещение внутри данной фигуры нескольких фигур, не имеющих общих точек, кроме, быть может, граничных.
* В некоторых задачах фигура разрезается на меньшие части (например, на две одинаковые), или наоборот, из нескольких данных фигур составляется одна большая. Это – задачи на разрезаниеили замощение. Замощение является одновременно покрытием и упаковкой.

Одной из первых аксиом геометрии, относящейся к взаимному расположению точек и прямых на плоскости, является аксиома о том, что через любые две точки плоскости проходит единственная прямая. Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием сложности.

1.1. Сколько прямых проходит через различные пары из трех точек, не лежащих на одной прямой?

1.2. Сколько прямых проходит через различные пары из четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

1.3. Сколько прямых проходит через различные пары из пяти точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

1.4. Сколько прямых проходит через различные пары из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? Укажите способ построения таких точек.

1.5. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь три прямые?

1.6. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре прямые?

1.7. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь пять прямых?

1.8. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых? Укажите способ построения таких прямых.

2.1. Какое наибольшее число точек пересечения могут иметь две окружности?

2.2. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь три окружности?

2.3. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре окружности?

2.4. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n окружностей? Укажите способ построения таких окружностей.

3.1. Сколько диагоналей имеет четырехугольник?

3.2. Сколько диагоналей имеет пятиугольник?

3.3. Сколько диагоналей имеет шестиугольник?

3.4. Сколько диагоналей имеет n-угольник?

3.5. Может ли многоугольник иметь: а) 10 диагоналей; б) 20 диагоналей; в) 30 диагоналей.

3.6. Существуют ли многоугольники, у которых число диагоналей равно числу сторон?

3.7. Может ли прямая пересекать все стороны треугольника?

3.8. Может ли прямая пересекать все стороны четырехугольника?

3.10. Может ли прямая пересекать все стороны 2n-угольника?

3.11. Может ли прямая пересекать все стороны (2n + 1)-угольника?

1. Какое максимальное число точек пересечения могут иметь восемь окружностей?
2. Дана квадратная доска размером 22×22 клеток. Какое наибольшее количество прямоугольных пластин размера 1×4 можно разместить на этой доске? Каждая пластина должна полностью закрывать 4 клетки доски.
3. На рисунке изображен план города. Городские кварталы имеют форму равных квадратов. Стороны квадратов являются улицами. Автомобилю нужно по улицам города проехать из пункта А в пункт В. Сколько существует различных маршрутов наименьшей длины?
4. Дан квадрат размером 3×3 клетки и краски трех цветов: синего, красного и белого. Сколькими способами можно закрасить клетки этого квадрата так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречалось бы ровно по одной клетке каждого цвета? Одну клетку можно закрашивать только одним цветом и никакую клетку нельзя закрашивать дважды.
5. Имеется доска размером 3×10 клеток и неограниченный набор прямоугольных пластинок, размером 1×2 клетки. Надя и Ваня играют в такую игру. Они делают ходы по очереди. За один ход разрешается положить на доску одну пластинку, полностью закрыв две свободные клетки с общей стороной. Проигрывает тот, кто не сможет положить очередную пластинку. Первой ходит Надя. Кто из ребят может обеспечить себе победу независимо от игры соперника и как ему это сделать?
6. Разрезать прямоугольник на несколько трапеций так, чтобы среди полученных трапеций не было бы ни одной прямоугольной. Число разрезов и число трапеций не ограничено
7. Радуга, как известно, состоит из 7 различных цветов. Надя решила нарисовать свою «радугу», в которой для любых двух различных цветов радуги (из этих семи) нашлись бы две соседние полоски этих цветов. Какое наименьшее число полосок может иметь Надина «радуга»?
8. Для окраски кубика с ребром 2 см требуется 1 г краски. Сколько краски потребуется для окраски кубика с ребром 6 см?
9. Каждую грань кубика разбили на 4 равных квадрата и раскрасили эти квадраты в три цвета так, чтобы квадраты, имеющие общую сторону, были разного цвета. Сколько оказалось квадратов каждого цвета.
10. Окрашенныё куб с ребром 4 см распилили на кубики с ребром, равным 1 см. Сколько среди них окажется кубиков с одной окрашенной гранью; с двумя окрашенными гранями; с тремя окрашенными гранями; со всеми неокрашенными гранями?
11. Раскрасьте плоскость в три цвета так, чтобы на каждой прямой были точки не более чем двух цветов, и каждый цвет был бы использован.
12. На каждой из клеток размером 9\*9 находится фишка. Петя хочет передвинуть каждую фишку на соседнюю по стороне клетку так, чтобы снова в каждой из клеток оказалось по одной фишке. Сможет ли Петя это сделать?
13. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на три равные части так, чтобы линии разреза шли по сторонам клеток.



1. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две равные части (линия разреза может идти не только по сторонам клеток, но и по диагоналям).



1. Разрежьте прямоугольник 4 x 9 по линиям сетки на две части так, чтобы из двух получившихся частей можно было сложить квадрат.
2. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на части, из которых можно сложить квадрат.



1. Можно ли покрыть равносторонний треугольник двумя равносторонними треугольниками меньшего размера?
2. Из пяти данных окружностей любые четыре проходят через одну точку. Докажите, что найдётся точка, через которую проходят все пять окружностей.
3. На окружности отмечено n точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся (n–1)-звенных ломаных с вершинами в этих точках?
4. В плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что некоторая прямая пересекает все эти многоугольники.
5. Каждая точка плоскости окрашена в красный или голубой цвет. Докажите, что найдется прямоугольник, все вершины которого окрашены в один и тот же цвет.
6. . Необходимо разделить треугольник на 19 треугольников так, чтобы в каждой вершине полученной фигуры (а также в вершинах большого треугольника) сходилось одинаковое число сторон. Число 19 нельзя заменить большим числом, но можно заменить меньшими числами. Какими же?